Corrigé

1. La fonction f est une fonction rationnelle, elle est donc dérivable (et continue) sur I.Pour tout $x > -4$, $f'(x) = \frac{2\times(x+4)-(2x+3)\times 1}{(x+4)^2} = \frac{2x+8-2x-3}{(x+4)^2} = \frac{5}{(x+4)^2} > 0$. Donc f est strictement croissante sur I.

2. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère la proposition $P(n)$: « $u_n \in [0\,;\,1]$ et $u_n \leqslant u_{n+1}$ ».Initialisation : Pour $n = 0$ on a $u_0 = 0,1$ et $u_1 = \frac{3,2}{4,1}$. On a donc bien $u_0 \in [0;1]$ et $u_0 \leqslant u_1$. $P(0)$ est donc vraie.Hérédité : on suppose qu'à un rang $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ soit vraie. On sait que $f(0) = 0,75$, $f(1) = 1$ et que f est croissante sur $[0;1]$, donc si $u_n \in [0;1]$, alors $u_{n+1} = f(u_n) \in [f(0); f(1)] \subset [0;1]$. D'après l'hypothèse de récurrence, $u_n \leqslant u_{n+1}$. f étant croissante, on a alors $f(u_n) \leqslant f(u_{n+1})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \leqslant u_{n+2}$.Donc si $P(n)$ est vraie, alors $P(n+1)$ est vraie.Conclusion : $P(0)$ vraie et il y a hérédité. $P(n)$ est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. La suite (u_n) est croissante et majorée, elle est donc convergente vers ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. On obtient $2\ell + 3 = \ell^2 + 4\ell$ soit $\ell^2 + 2\ell - 3 = 0 \Leftrightarrow (\ell - 1)(\ell + 3) = 0$. On peut donc avoir $\ell = -3$ ou $\ell = 1$. Puisque $u_n \in [0;1]$, on a alors $\ell = 1$.